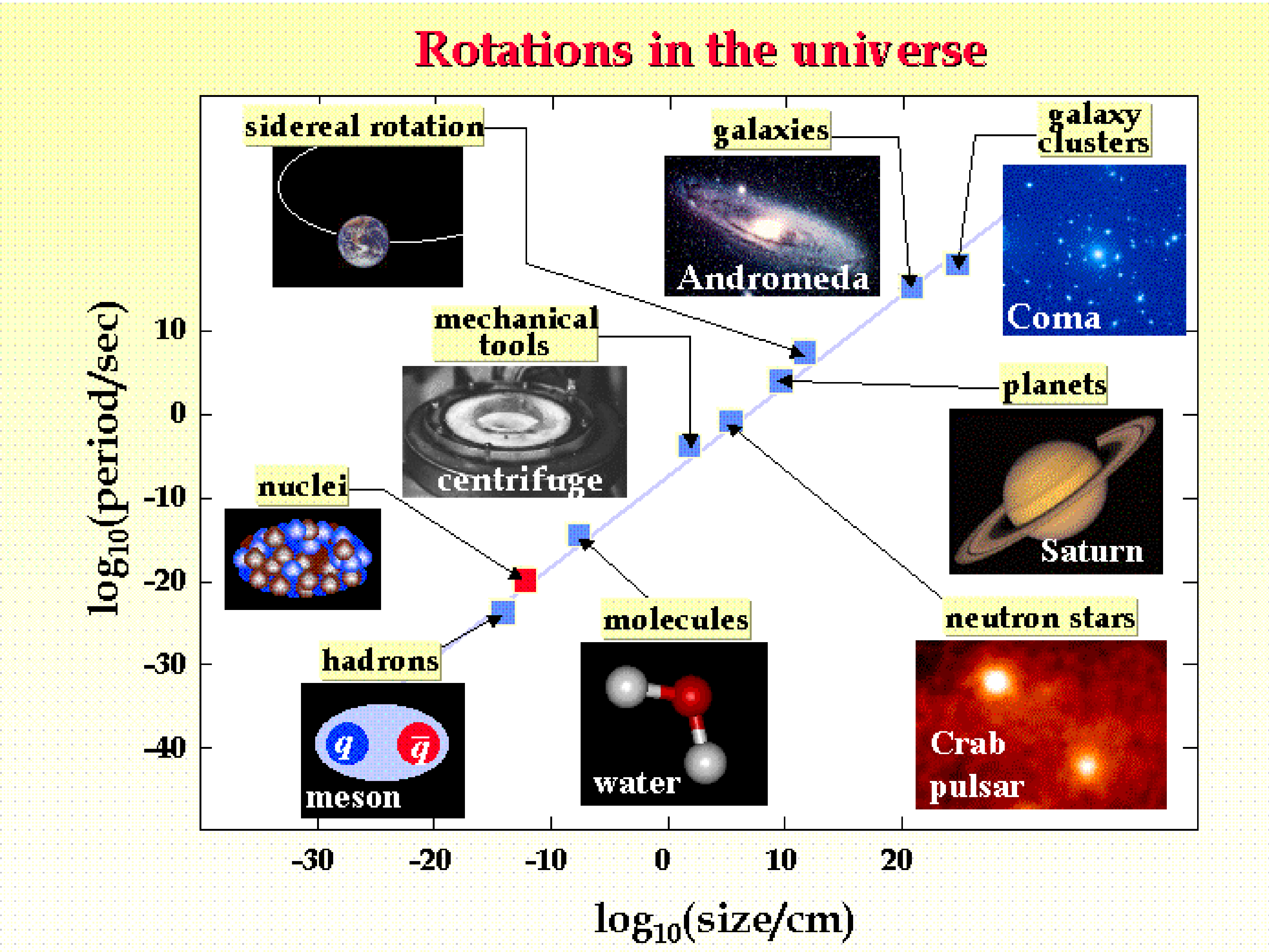
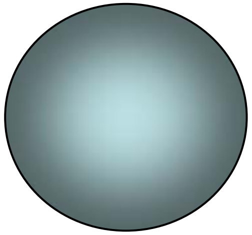
Dinamica de rotacion. Torque. Momentum Angular. Aplicaciones.

Movimiento de rotación.

- Cuerpos rígidos – un cuerpo con una forma definida, que no cambia en forma que las partículas que lo componen permanecen en posiciones fijas entre si.
  El movimiento de un cuerpo rígido se puede analizar como el movimiento de translación de su centro de masa, mas movimiento de rotación respecto de centro de masa. Por movimiento puramente rotacional se entiende cuando todos los puntos de un cuerpo describen círculos.


Rotations in the universe
sidereal rotation
galaxies
galaxy clusters
Andromeda
Coma
mechanical tools
centrifuge
planets
Saturn
nuclei
molecules
water
neutron stars
Crab pulsar
hadrons
meson
q
$\bar{q}$
10
0
-10
-20
-30
-40
-30
-20
-10
0
10
20
$\log_{10}$(period/sec)
$\log_{10}$(size/cm)

Magnitudes angulares:



- Ángulo θ : [rad]

$$\theta$$

- Velocidad angular w : [rad s^{-1}]

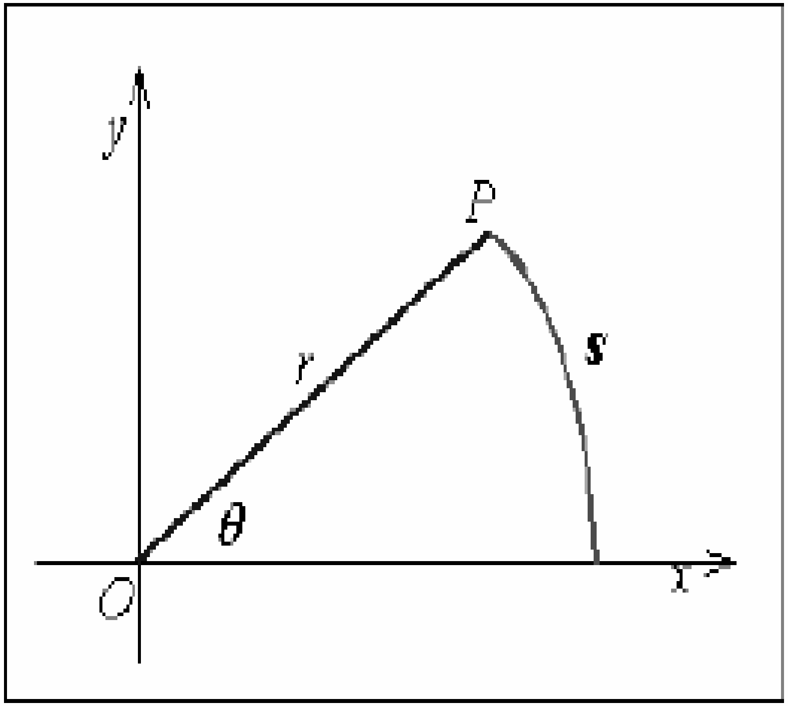
$$w = \frac{d\theta}{dt}$$

- Aceleración angular α :[rad s^{-2}]

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$w - w_0 = \int \alpha \, dt$$

$$\theta - \theta_0 = \int w \, dt$$



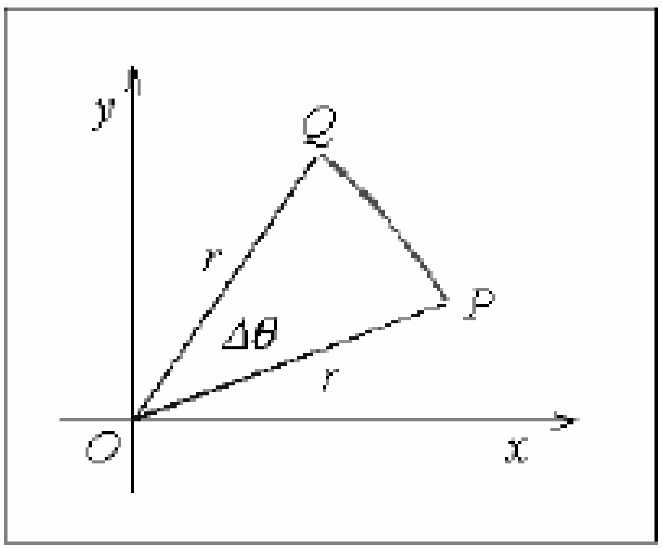
•Se observa que el ángulo es una variable adimensional, pero se le asigna como unidad de medida el nombre del ángulo, llamado ***radian***, con símbolo *rad*.
•Se define un radian como el ángulo subtendido por un arco de circulo de igual longitud que el radio de la misma.
•Como en una circunferencia, $s = 2\pi r$, y $2\pi\ (rad) = 360º$, se puede encontrar la relación entre radianes y grados:

$$s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{r}$$

$$\theta(rad) = \frac{2\pi}{360°}\theta°$$

De aquí se deduce que el valor en grados de un radian es $1\ rad = 57.3º$, y que por ejemplo, $45º = \pi/4\ rad$.

- Cuando una partícula se mueve desde *P* hasta *Q*, en un intervalo de tiempo Δt, el radio se mueve un ángulo $\Delta\theta$, que es el desplazamiento angular. De manera análoga al movimiento lineal, se definen la rapidez angular ω y aceleración angular α como:



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Sus unidades de medida son *rad/s* y *rad/s²*, recordando que el radian no es una unidad de medida, por lo que en el análisis dimensional se obtienen para estas variables las dimensiones de *1/s* y *1/s²*.

Cinemática de rotación.

- El desplazamiento, velocidad y aceleración angular son análogos a sus similares variables lineales. Así las ecuaciones cinemáticas del movimiento de rotación con aceleración angular constante tienen la misma forma que las correspondientes al movimiento lineal haciendo los reemplazos *x* por θ, ***v*** por ω y ***a*** por α, por lo que las ecuaciones cinemáticas del movimiento angular son:

$$\boxed{\theta = \theta_o + \omega_o (t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha (t - t_o)^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_o + \alpha (t - t_o)}$$

Relación entre las variables angulares y lineales.

- Para toda partícula que gira describiendo una trayectoria circunferencial, existe una relación entre las magnitudes angulares con las correspondientes lineales. Si la partícula recorre una distancia lineal *s*, moviéndose un ángulo θ sobre una trayectoria circunferencial de radio *r*, tiene una velocidad que por ser tangente a la trayectoria se llama velocidad tangencial, y tiene aceleración tangencial y centrípeta, er

$$s = r\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$$

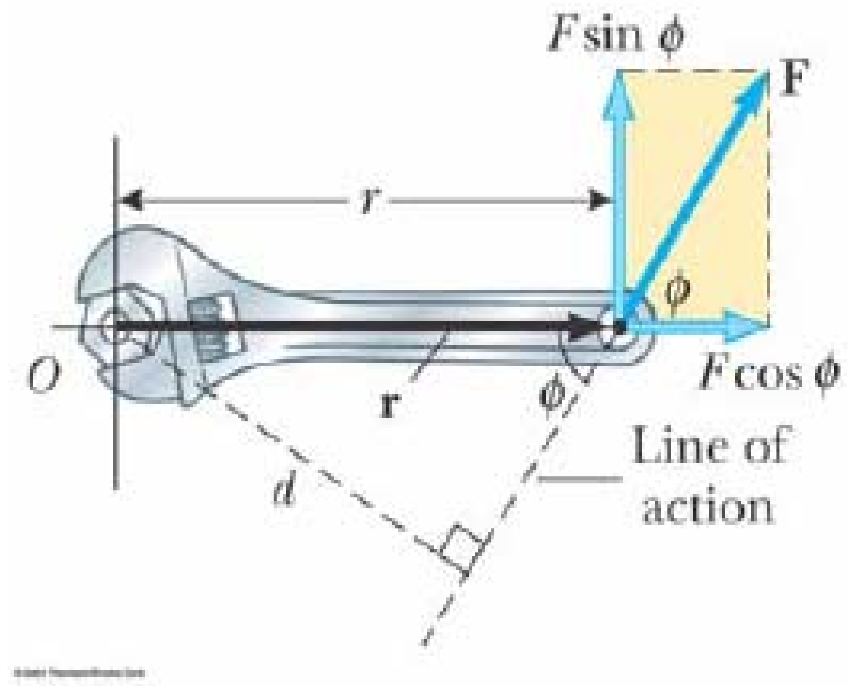
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Primera Ley De Newton:

Un cuerpo en rotación libre continuara girando con velocidad angular constante, siempre cuando no hay una fuerza neta que actué para cambiar este movimiento.

- Para hacer que un objeto comience a girar de un eje es necesaria una fuerza. Pero la dirección de la fuerza y su punto de aplicación son importantes.Se define el brazo del momento, d, es la distancia perpendicular desde el eje de rotación, O, a la línea tangente a la dirección de la fuerza.



- $d = r \operatorname{sen} \Phi$

Momento de fuerzas (o torca)

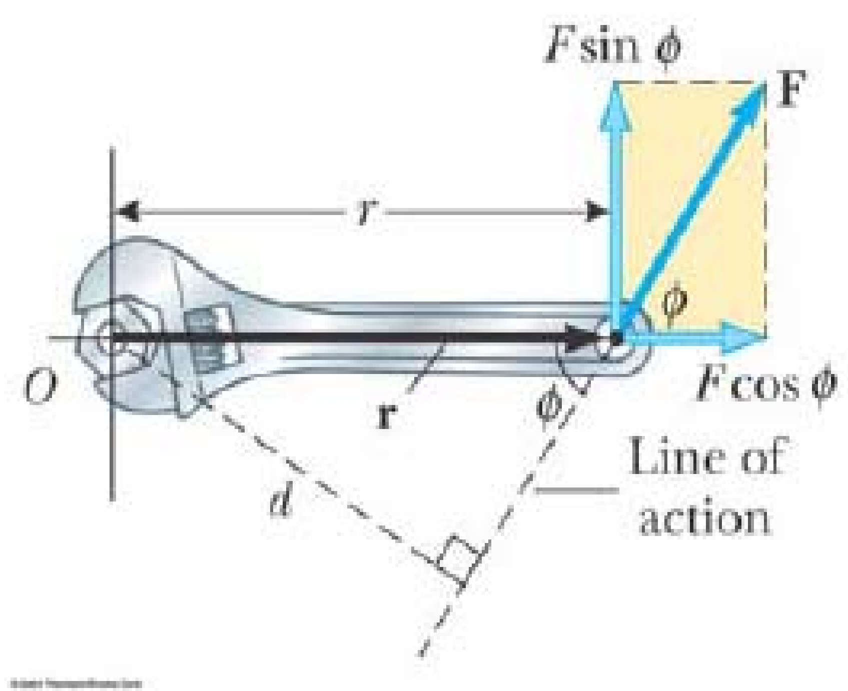
- El momento de fuerzas, τ, es la tendencia de una fuerza a hacer rotar un objeto alrededor de algún eje.
- El momento de fuerzas es un vector.

Algebraicamente,

- **F** es la Fuerza
- **r** es el brazo de aplicación
- En caso de rotación la fuerza se reemplaza por la torca –que se define como el producto da la fuerza por el brazo de palanca.

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

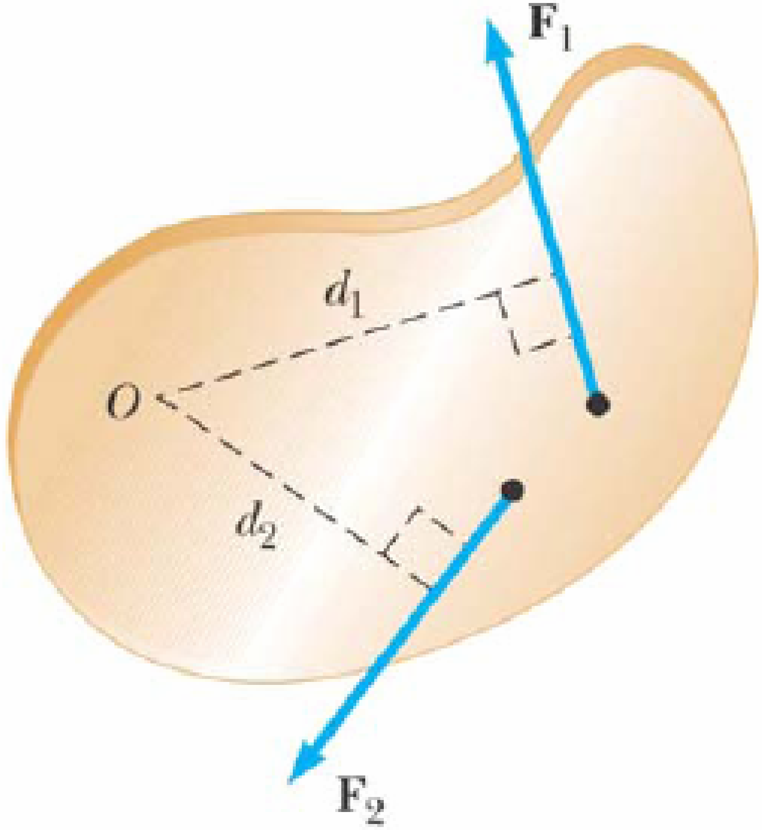
- $\tau = Fd = Fr\,\mathrm{sen}\,\Phi$



- La componente horizontal de la fuerza ($F \cos \phi$) no produce una rotación
- La unidades del momento de fuerzas en el S.I. son el N m, aunque son completamente distintas a las del trabajo o la energía (no se pueden escribir como Julios)
- El momento de fuerzas tendrá dirección
  - Perpendicular a $\boldsymbol{r}$ y a $\boldsymbol{F}$.
  - Sentido determinado por el sentido de avance del sacacorchos haciendo tender $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$

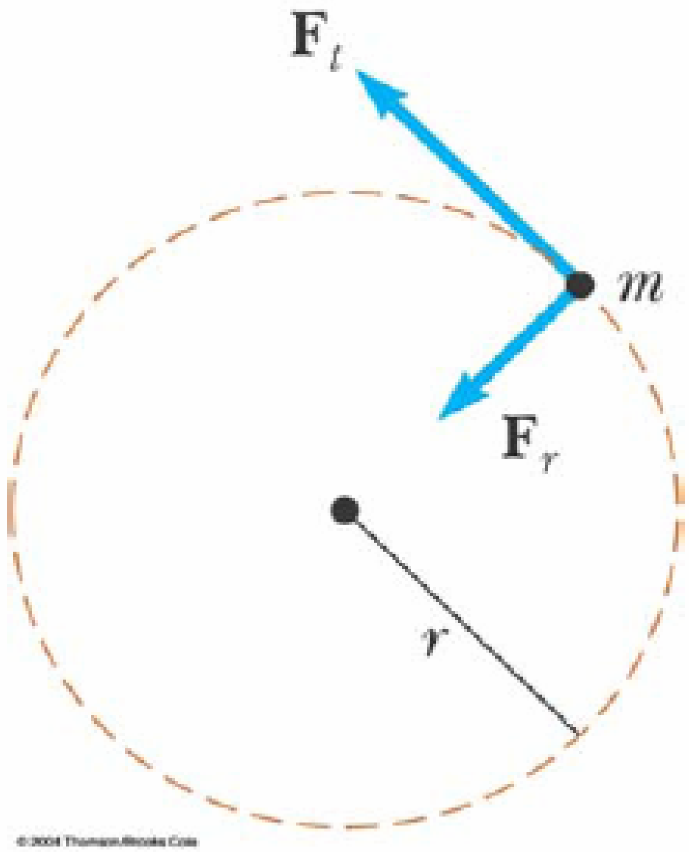
Momento de fuerzas neto

- Cuando haya varias fuerzas actuando sobre el sistema, se calculará el momento neto o momento resultante como la suma vectorial de los momentos de cada una de las fuerzas
- $\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$



Momento de fuerzas y aceleración angular

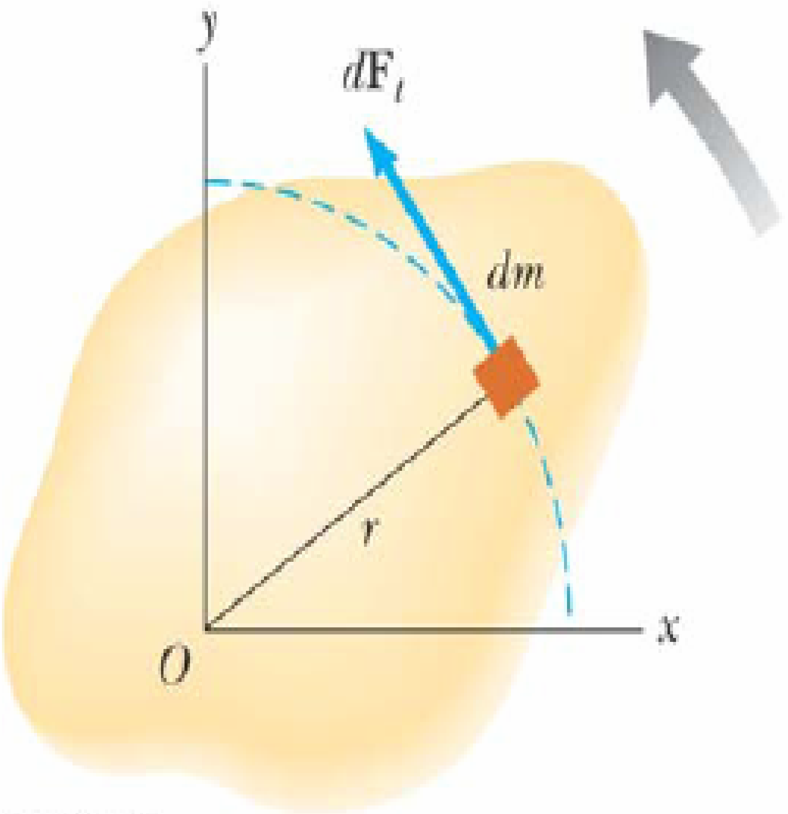
- Consideremos una partícula de masa *m* describiendo una circunferencia de radio *r* bajo la influencia de una fuerza tangencial F_t
- La fuerza tangencial produce una aceleración tangencial:
  - $F_t = m\, a_t$



Momento de fuerzas y aceleración angular

- El módulo del momento de fuerzas producido por F_t con respecto al centro de la circunferencia es:
  - $\tau = F_t\, r = (m\, a_t)\, r$
- La aceleración tangencial está relacionada con la aceleración angular
  - $\tau = (m\, a_t)\, r = (m\, \alpha\, r)\, r = (m\, r^2)\, \alpha$
- Puesto que $m\, r^2$ es el momento de inercia de la partícula,
  - $\tau = I\, \alpha$
  - *El momento de fuerza es directamente proporcional a la aceleración angular y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia*

- Consideremos un objeto formado por un número infinito de elementos de masa de tamaño infinitesimal
- Cada elemento de masa rota en una circunferencia alrededor del origen, O
- Cada elemento de masa tiene una fuerza tangencial



- De la segunda ley de Newton
  - $dF_t = (dm)\ a_t$
- Tomando el momento de fuerza asociado a la fuerza y sustituyendo la aceleración angular:
  - $d\tau = r\ dF_t = a_t\ r\ dm = \alpha\ r^2\ dm$
- El momento de fuerzas resultante es:

$$\boxed{\int \tau = \int \alpha\, r^2 dm = \alpha \int r^2 dm}$$

  - De modo que resulta: $\Sigma\tau = I\alpha$

- Definiremos momento angular como el momento del momento lineal: $\boxed{\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}}$

- Si derivamos en ambos miembros:

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- El primer término es nulo, pues ***v*** y ***p*** son paralelos y el segundo es la definición de fuerza de la segunda ecuación de Newton, de modo que tendremos

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}}$$

- El equivalente de la segunda ley de Newto para el movimiento de rotación es:

$$F_t = ma_t = mr\alpha$$

- El momento de torsión neto que actúa sobre un cuerpo rígido es proporcional a su aceleración angular, y la constante es momento de inercia.

$$\tau = I\alpha$$

Momento angular 1partícula

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}}$$

El momento de fuerzas Implica una variación de momento angular

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$$\boxed{L = Iw}$$

Conservación

Si $\vec{\tau}=0 \rightarrow \vec{L}=cte$

Ec rotación 1partícula

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} m v_t^2 = \frac{1}{2} m r^2 w^2}$$

→La Ec se puede expresar en función del momento de inercia.

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} I w^2}$$

$$\boxed{Ec = \frac{L^2}{2I}}$$

El cuerpo rígido en equilibrio

- Para que un objeto este en equilibrio debe cumplir dos condiciones.
- La fuerza neta debe ser igual a cero.

$$\Sigma \mathbf{F}=0$$

- El momento de torsión externo neto, respecto a cualquier eje debe ser igual a cero.

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}=0$$

Trabajo

- $dW = \tau d\theta$
- $W = 1/2\ I\ \omega f^2 - 1/2\ I\ \omega i^2$